

Karol Krzemiński*

MODELE MATEMATYCZNE ŁOŻYSKA POROWATEGO I STOSOWANE UPROSZCZENIA

MATHEMATICAL MODELS OF POROUS BEARING AND THEIR SIMPLIFICATIONS

Słowa kluczowe:

łożysko porowate, przepuszczalność, rozkład ciśnienia, nośność

Key- words:

porous bearing, permeability, pressure distribution, load capacity

Streszczenie

W pracy podane zostały równania ruchu cieczy w łożysku porowatym o skończonej długości i stosowane uproszczenia dla łożyska o nieskończonej długości oraz dla łożyska wąskiego. Szczegółowo omówiono założenia przyjęte przez Camerona dla łożyska wąskiego oraz przeprowadzono obliczenia porównawcze rozkładów ciśnienia i nośności łożyska obliczone wg wzorów Camerona oraz dla łożyska porowatego o skończonej długości.

* Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej, Politechnika Warszawska

WPROWADZENIE

Łożyska porowate stanowią specyficzną grupę łożysk ślizgowych, które mogą pracować w warunkach samosmarowania. Teoretyczna analiza pracy łożysk porowatych jest bardziej skomplikowana w porównaniu do łożysk konwencjonalnych z panwią litą, bowiem w modelu matematycznym łożyska porowatego należy uwzględnić, że ruch cieczy odbywa się równocześnie w dwóch ośrodkach, w szczelinie smarnej i w tulei porowatej. Aby obliczyć rozkłady ciśnienia w łożysku porowatym należy rozwiązać dwa równania opisujące ruch cieczy w szczelinie smarnej i w tulei porowatej.

Rozwiązanie pełnych równań ruchu cieczy w łożysku porowatym możliwe jest tylko na drodze numerycznej. Dla ułatwienia rozwiązania często stosuje się uproszczone modele oparte na założeniach wykorzystywanych w łożyskach konwencjonalnych. Należy jednak pamiętać, że wyniki rozwiązań uzyskane dla uproszczonych modeli mogą być obarczone znacznym błędem.

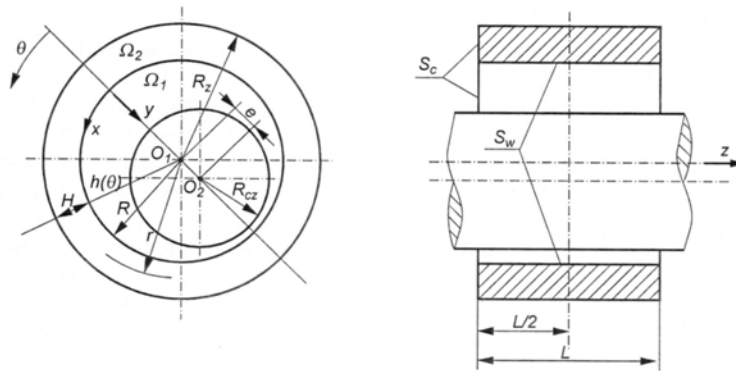
RÓWNANIA RUCHU CIECZY W ŁOŻYSKU POROWATYM

Przedstawiona analiza dotyczyć będzie przepływów izotermicznych z pominięciem zjawisk cieplnych występujących w łożysku porowatym. Przyjmując dalej, że ciecz jest nieściśliwa, newtonowska, o stałej lepkości, przepływ jest ustalony, laminarny z pominięciem sił masowych, ruch cieczy w szczelinie smarnej można opisać równaniem Reynoldsa (1), a w tulei porowatej równaniem Laplace'a (2).

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} U \frac{dh}{Rd\theta} - \nu_0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_\theta \frac{\partial p^*}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) = 0 \quad (2)$$

gdzie: k_θ, k_r, k_z – współczynniki filtracji w kierunku obwodowym, promieniowym i osiowym



Rys. 1. Schemat łożyska porowatego

Fig.1. Scheme of porous bearing

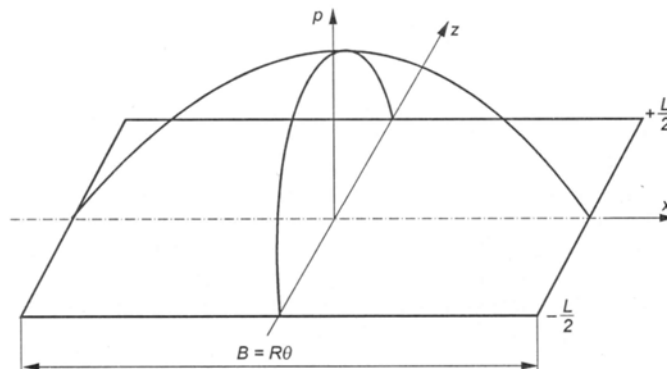
Równania (1) i (2) napisano we współrzędnych cylindrycznych, przy założeniu równoległego położenia osi czopa i tulei porowatej (rys.1). W ogólnym przypadku współczynniki filtracji $k_i = \phi_i / \eta$ są funkcjami współrzędnych. W modelach uproszczonych przyjmuje się, że tuleja jest izotropowa i wówczas $k_\theta = k_r = k_z = k$. Szczegółowe wyprowadzenie równań ruchu cieczy (1) i (2) podano w pracach [1,3,4]. Rozwiązując układ tych równań uzyskuje się rozkłady ciśnienia w szczelinie smarnej oznaczone przez p oraz w tulei porowatej przez p^* . Znając rozkłady ciśnienia w łożysku można obliczyć jego nośność, opory ruchu w szczelinie smarnej, upływy boczne oleju.

ŁOŻYSKO WĄSKIE ORAZ O NIESKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI

Równania ruchu (1) i (2) opisują przestrzenny ruch cieczy w łożysku porowatym o skończonej długości. W modelach uproszczonych zakłada się, że przepływ w łożysku może być jedno lub dwuwymiarowy, co znacznie ułatwia rozwiązanie. W przypadku łożyska o nieskończonej długości można przyjąć, że gradient ciśnienia w kierunku z jest mały w porównaniu do gradientu ciśnienia w kierunku obwodowym $\partial p / \partial z \ll \partial p / \partial x$ i wówczas można przyjąć, że $\partial p / \partial z \approx 0$

Rozpatrując łożysko wąskie o $L \rightarrow 0$, można założyć, że $\partial p / \partial x \approx 0$. Interpretacja przyjętych założeń jest szczególnie prosta w oparciu o rys.2, gdzie pokazano rozkład ciśnienia w zwiężającej się części szczeliny smarnej rozwiniętej do płaszczyzny wzdłuż powierzchni

wewnętrznej tulei. Takie rozwinięcie można stosować, gdy $R \gg h$ i zmiany ciśnienia wzdłuż wysokości szczeliny smarnej można pominąć $\partial p / \partial y = 0$.



Rys.2. Rozkład ciśnienia na rozwiniętej do płaszczyzny powierzchni wewnętrznej tulei

Fig.2. Pressure distribution on involved to plane the inner face of bushes

Dla łożyska nieskończenie długiego $L \gg B$ można przyjąć, że $\partial p / \partial z = \partial p^* / \partial z \approx 0$ i wówczas układ równań sprowadza się do postaci:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} U \frac{dh}{dx} - v_o \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial p^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_z \frac{\partial p^*}{\partial y} \right) = 0 \quad (4)$$

Otrzymany układ równań nie ma rozwiązania analitycznego i można go rozwiązać tylko numerycznie, stąd układ równań (3) i (4) jest rzadko wykorzystywany [5].

W łożysku wąskim przyjmuje się, że $\partial p / \partial x = \partial p^* / \partial x \approx 0$ i wówczas otrzymuje się układ równań w postaci:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} U \frac{dh}{dx} - v_o \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial p^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) = 0 \quad (6)$$

Ten układ równań można rozwiązać analitycznie i takie rozwiązanie przedstawił Cameron w pracy [2]. Z rozwiązania układu równań (5) i (6) otrzymuje się prosty wzór na rozkład ciśnienia w szczelinie smarnej łożyska porowatego, który dotychczas jest często wykorzystywany w różnych publikacjach. Jednakże zakres zastosowania takiego modelu jest ograniczony do łożysk porowatych o małej długości, co zostanie wyjaśnione w dalszej części opracowania.

MODEL CAMERONA

Równanie Reynoldsa (5) można przekształcić do postaci:

$$h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 6\eta \left(U \frac{dh}{dx} - 2v_0 \right) \quad (7)$$

Zakładając, że przepływ w ciele porowatym odbywa się zgodnie z prawem Darcy można napisać:

$$v_0 = - \left(\frac{\partial p^*}{\partial y} \right)_R \frac{\phi}{\eta} \quad (8)$$

Natomiast dla $k = \phi/\eta = \text{const}$ równanie Laplace'a przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = 0 \quad (9)$$

Korzystając z równania (9) można napisać:

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = m \quad (10)$$

Całkując równanie (10) otrzymuje się $\frac{\partial p^*}{\partial y} = my + C$. Na zewnętrznej powierzchni tuleja wciśnięta jest w nieprzepuszczalny korpus, to dla $y = -H$, $\frac{\partial p^*}{\partial y} = 0$, a stąd $C = mH$. Zatem na powierzchni wewnętrznej tulei na granicy z filmem smarnym dla $y = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = mH$. Wykorzystując równanie (10) otrzymuje się:

$$\left(\frac{\partial p^*}{\partial y}\right)_0 = -\left(\frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2}\right)_0 H \quad (11)$$

Wstawiając to wyrażenie do równania Reynoldsa (7) oraz uwzględniając równanie Darcy (8) i wiedząc, że $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ otrzymuje się:

$$h^3 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 6\eta U \frac{dh}{dx} - 12\phi \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} H \quad (12)$$

Ponieważ na powierzchni wewnętrznej tulei dla $y = 0$, $p = p^*$, stąd po uporządkowaniu można napisać:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 6\eta U \left(\frac{\frac{dh}{dx}}{h^3 + 12\phi H} \right) \quad (13)$$

Po dwukrotnym całkowaniu otrzymuje się:

$$p = 6\eta U \left(\frac{\frac{dh}{dx}}{h^3 + 12\phi H} \right) \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 \quad (14)$$

Wstawiając warunki brzegowe, że $p=0$ dla $z=\pm\frac{L}{2}$ oraz dla $z=0, \frac{\partial p}{\partial z}=0$ otrzymuje się wzór na rozkład ciśnienia w łożysku wąskim.

$$p = 3U\eta \left(\frac{\frac{dh}{dx}}{h^3 + 12\phi H} \right) \left(z^2 - \frac{L^2}{4} \right) \quad (15)$$

Z równania (15) wynika, że rozkład ciśnienia w kierunku z jest paraboliczny. Dla równoległego położenia osi czopa i tulei wysokość szczeliny smarnej można zapisać jako: $h = c(1 + \varepsilon \cos \theta)$. Widząc, że $x = R\theta$, po zróżniczkowaniu $\frac{dh}{dx}$ wzór (15) przyjmie postać:

$$p = \frac{3U\eta}{Rc^2} \left[\frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3 + \left(\frac{12\phi H}{c^3} \right)} \right] \left(\frac{L^2}{4} - z^2 \right) \quad (16)$$

Wzór ma postać podobną do równania Ocvirka dla łożyska konwencjonalnego, a różni się tylko występowaniem członu $12\frac{\phi H}{c^3} = 12\psi$ (gdzie $\psi = \frac{\phi H}{c^3}$), zawierającego bezwymiarową wartość przepuszczalności tulei porowatej [1, 2].

Mając wzór na rozkład ciśnienia w szczelinie smarnej można obliczyć składowe wektora obciążenia łożyska:

$$W_x = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^\pi p R d\theta \cos \theta dz = \frac{U\eta L^3}{2c^2} \int_0^\pi \frac{\varepsilon \sin \theta \cos \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3 + 12\psi} \quad (17)$$

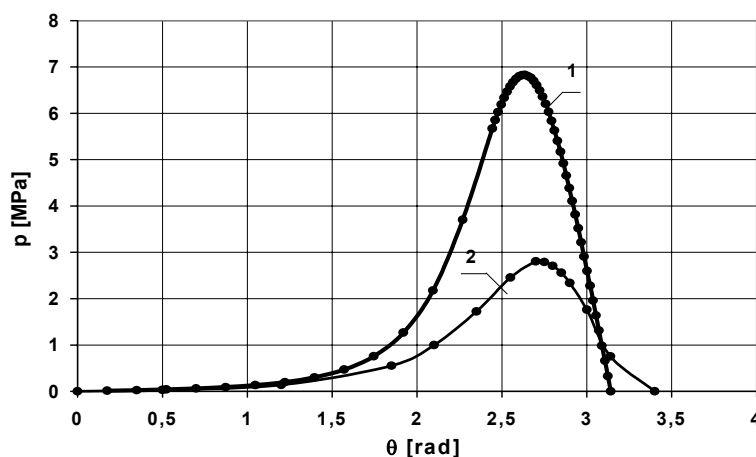
$$W_y = \frac{U\eta L^3}{2c^2} \int_0^\pi \frac{\varepsilon \sin^2 \theta d\theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3 + 12\psi} \quad (18)$$

Nośność łożyska można obliczyć z zależności:

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (19)$$

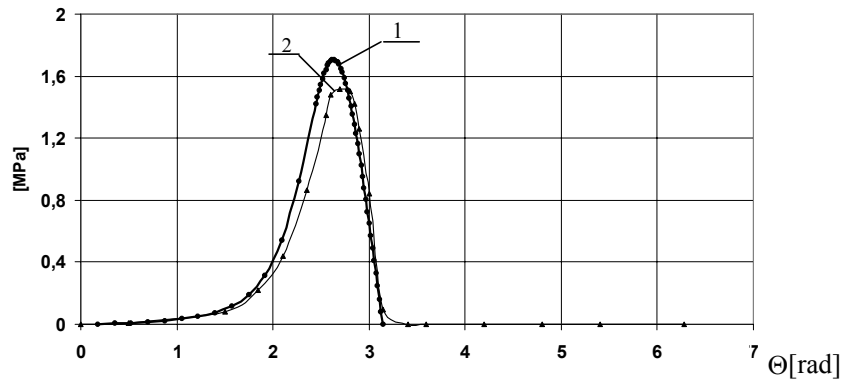
Na rys.3 i 4 pokazano rozkłady ciśnienia w szczelnie smarnej obliczone dla łożyska porowatego z tuleją o wymiarach $\phi 25/\phi 36 \times 20 \text{ mm}$ ($L/D=0,8$) oraz $\phi 25/\phi 36 \times 10 \text{ mm}$ ($L/D=0,4$) obliczone ze wzoru(16) oraz wg autora [4]. Obliczenia wykonano dla łożyska z tuleją porowatą o przepuszczalności $\phi = 1 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$, smarowanego olejem o lepkości $\eta = 1 \cdot 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$, pracującego przy prędkości $U = 2 \text{ m/s}$ i mimośrodowości względnej $\varepsilon = 0,9$.

Z równania Camerona(16) uzyskuje się rozwiązanie, w którym ciśnienie spada do zera w miejscu najmniejszej szczeliny smarnej dla $\theta = 180^\circ$ (warunek Sommerfelda). W rozwiązaniu numerycznym przyjęto, że film smarny kończy się dla $\theta > 180^\circ$, w punkcie gdzie $p = 0$ i $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$ (warunki Reynoldsa).



Rys. 3. Rozkłady ciśnienia w szczelnie smarnej dla łożyska o wymiarach $\phi 25/\phi 36 \times 20 \text{ mm}$ ($L/D=0,8$). Krzywa 1 – ciśnienie obliczone wg wzoru Camerona, 2 – obliczenia numeryczne autora .

Fig.3. Pressure distributions in oil gap for the bearing with dimensions $\phi 25/\phi 36 \times 20 \text{ mm}$ ($L/D=0,8$). Curve 1- pressure calculated for Cameron model, 2- calculations of author



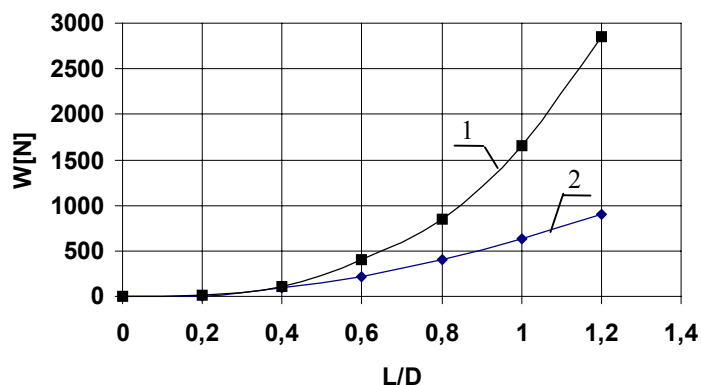
Rys. 4. Rozkłady ciśnienia w szczelinie smarnej dla łożyska o wymiarach $\phi 25/\phi 36 \times 10 \text{ mm}$ ($L/D=0,4$). Krzywa 1 – ciśnienie obliczone wg wzoru Camerona, 2 – obliczenia numeryczne autora

Fig.4. Pressure distributions in oil gap for the bearing with dimensions $\phi 25/\phi 36 \times 10 \text{ mm}$ ($L/D=0,4$). Curve 1- pressure calculated for Cameron model, 2- calculations of author

Z porównania rozkładów ciśnień pokazanych na rys.3. obliczonych dla $L/D=0,8$ wynika, że maksymalne ciśnienia obliczone ze wzoru Camerona są znacznie większe niż uzyskane z obliczeń numerycznych dla łożyska o skończonej długości. Natomiast dla $L/D=0,4$ obliczone rozkłady ciśnienia dla obu modeli są już bardzo zbliżone,

Jakie różnice występują w wartościach nośności łożysk obliczonych wg wzoru Camerona i rozwiązania równań (1) i (2) dla łożysk o różnych wartościach L/D pokazano na rys.5. Należy pamiętać, że wzór (16) opisuje ciśnienie w filmie smarnym dla $L/D \rightarrow 0$. Wraz ze wzrostem L/D zwiększają się różnice w wartościach nośności łożysk obliczonych ze wzoru (19) w stosunku do nośności obliczonej dla łożyska o skończonej długości.

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że wzór Camerona daje dobre wyniki porównywalne z rozwiązaniem dla łożyska o skończonej długości dla $L/D \leq 0,4$. Wraz ze wzrostem $L/D > 0,4$ proporcjonalnie do wzrostu długości łożyska wzrastają różnice w wartościach nośności obliczonych wg. modelu Camerona i dla łożyska o skończonej długości.



Rys.5. Zmiana nośności łożyska w funkcji L/D. Krzywa 1- nośności obliczone wg. wzoru Camerona, krzywa 2 –nośności obliczone dla łożyska o skończonej długości

Fig.5. Change of load capacity in function L/D. Curve 1- load capacity calculated by Cameron, curve (2) -load capacity calculated for bearing of finite length.

PODSUMOWANIE

Dla ułatwienia rozwiązania równań ruchu cieczy w łożysku porowatym często stosuje się modele uproszczone zakładając, że łożysko jest wąskie lub o nieskończonej długości. Model łożyska o nieskończonej długości jest rzadko stosowany ze względu na brak rozwiązania analitycznego.

Założenia upraszczające przyjęte w modelu Camerona dotyczące porowatego łożyska wąskiego dają układ równań, który można rozwiązać analitycznie. W efekcie otrzymuje się prosty wzór, który pozwala określić rozkład ciśnienia w szczelinie smarnej dla izotropowej tulei porowatej oraz obliczyć nośność łożyska.

Przyjęte uproszczenia powodują, że rozwiązanie Camerona można stosować dla łożysk o $L/D \leq 0,4$, bowiem wówczas różnice w wartościach nośności obliczone ze wzoru Camerona i z rozwiązania pełnego wynoszą około 10%. Wraz ze wzrostem długości łożyska różnice te rosną i dla $L/D=0,8$ wynoszą ponad 100%. Poza tym model Camerona nie daje możliwości obliczenia rozkładów ciśnienia w tulei porowatej.

LITERATURA

1. A.Cameron: The principles of lubrication. New York McHill 1987

2. A.Cameron, V.T.Morgan, A.E.Stainsby: Critical conditions for hydrodynamic lubrication of porous metal bearings. Proc.Instn.Mech.Engrs.Vol.176,nr 28 1962,s761-768
3. K.Krzemiński: Rozkład ciśnień i nośność hydrodynamicznego filmu smarnego w łożyskach porowatych. Mechanika Teoretyczna i Stosowana 2/1978, s.169-180.
4. K.Krzemiński: Wykorzystanie metody elementów skończonych w problematyce hydrodynamicznego smarowania łożysk porowatych. Rozprawy Inżynierskie. 1/1980, s.75-92.
5. M.Rembiasz: Płaski przepływ oleju w łożysku porowatym. Archiwum Bud. Maszyn.nr.2/1973

Recenzent:
Marek WIŚNIEWSKI

Summary

The equations of liquid motion for finite porous bearings and applied simplifications for infinite bearing and narrow bearing were described in the paper. The assumptions for narrow bearing approximation given for Cameron were deathly presented. The pressure distributions in oil gap calculated for finite bearing and narrow bearing give for Cameron were compared.