

# PROBLEMY NIEKONWENCJONALNYCH UKŁADÓW ŁOŻYSKOWYCH

Łódź 09-10 maja 1995 roku

Edward Walicki, Anna Walicka, Tomasz Karpiński  
(WSI Zielona Góra)

## PARAMETRY MECHANICZNE WIELOKRZYWKOWEGO ŁOŻYSKA STOŻKOWEGO SMAROWANEGO FERROCIECZĄ

### SŁOWA KLUCZOWE

metoda Galerkina, stożkowe łożysko wielokrzywkowe, ferrociecierz, parametry mechaniczne

### STRESZCZENIE

W pracy przedstawiono rozwiązanie problemu nośności wielokrzywkowego łożyska stożkowego smarowanego ferrocieczą. Zagadnienie zostało rozwiązane poprzez zastosowanie metody Galerkina przy założeniu, że efekty bezwładnościowe są pomijalnie małe. Podano ogólne formuły do obliczenia parametrów mechanicznych łożyska.

### WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

$\hat{x}, \alpha, \Theta$  układ współrzędnych sferycznych,

$\varepsilon = \frac{R_i}{R_0}$  stosunek promieni wału łożyska,

$R_a = \frac{R_0}{2}(1 + \varepsilon)$  średni promień wału łożyska,

$\delta = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$  względna długość promieniowa łożyska,

$\eta = \frac{\Delta L}{R_a}$  względna długość osiowa łożyska,

$\omega$  prędkość kątowna wału łożyska,

$\Lambda = \frac{6\mu\omega R_a^2}{h_M^2}$  bezwymiarowa liczba ciśnienia,

$p$  ciśnienie,

$P = \frac{p}{\Lambda}$  ciśnienie bezwymiarowe,

$\mu$  lepkość dynamiczna ferrocieczy,

$\mu_0$  przenikalność magnetyczna próżni,

$\sigma$  wartość charakteryst. namagnesowania,

$v$  indeks nasycenia magnetycznego,

$\hat{H}_b$  natężenie pola magnetycznego,

$H_0$  charakterystyczna wartość pola magnetycznego,

$H_b = \frac{\hat{H}_b}{H_0}$       bezwymiarowa wartość pola magnetycznego

$R_f = \frac{\mu_0 \sigma H_0^v}{v \Lambda}$       wskaźnik namagnesowania ferrocieczy.

## WPROWADZENIE

Współczesny kierunek rozwoju przemysłu zakłada stosowanie wysokoobrotowych maszyn o zmniejszonych wymiarach i ciężarze.

Aby uzyskać zadowalające osiągnięcia techniczne wspomnianych maszyn stosuje się łożyska stożkowe, które mogą przenosić zarówno obciążenia wzdłużne jak i promieniowe. W celu poprawienia proporcji przenoszonych obciążeń do masy wirujących elementów zaczęto stosować w ostatnich latach łożyska stożkowe wielokrzywkowe, głównie ze względu na ich podwyższone charakterystyki mechaniczne.

Rozwój fizykochemii środków smarnych pozwolił na wprowadzenie nowych rodzajów mediów, które nie tylko poprawiają warunki eksploatacji łożysk, ale często także ich charakterystyki mechaniczne. Do tych mediów można zaliczyć ferrociecze.

Ferrociecze są koloidalnymi zawiesinami cząstek stałych ferromagnetyków w elektrycznie obojętnej cieczy nośnej. Jako ciecz nośną stosuje się proste związki węglowodorowe lub wodę. Cząstki ferromagnetyku pokryte są odpowiednim składnikiem zapobiegającym ich koagulacji; zatem ferrociecze zachowują stabilność stężenia i nie podlegają ani agregacji ani sedymentacji pod działaniem pól grawitacyjnych i magnetycznych. Pod działaniem pola magnetycznego następuje jedynie uporządkowanie biegunów magnetycznych cząstek ferromagnetyku, co prowadzi do pojawienia się sił masowych Lorentza w obszarze wypełnionym ferrocieczą. Ferrociecze znalazły liczne zastosowania techniczne w budowie maszyn [3, 4], a w szczególności w łożyskach ślizgowych [1, 6].

Rozkład ciśnienia w filmie smarnym jest określony rozwiązaniem równania Reynoldsa. Analityczne rozwiązania równania Reynoldsa są możliwe dla przypadku nieskończonego długiego i krótkiego łożyska [2].

Celem pracy jest przedstawienie formuł pozwalających określić następujące parametry mechaniczne wielokrzywkowego łożyska stożkowego: rozkład ciśnienia wzdłuż tworzącej wału łożyska, nośność łożyska, moment tarcia.

Zastosowano metodę Galerkiną [7], przyjmując ferrociecz jako medium smarne.

## OPIS ŁOŻYSKA

Rysunek 1 przedstawia konfigurację rozważanego łożyska. Promień wału łożyska opisany jest funkcją:

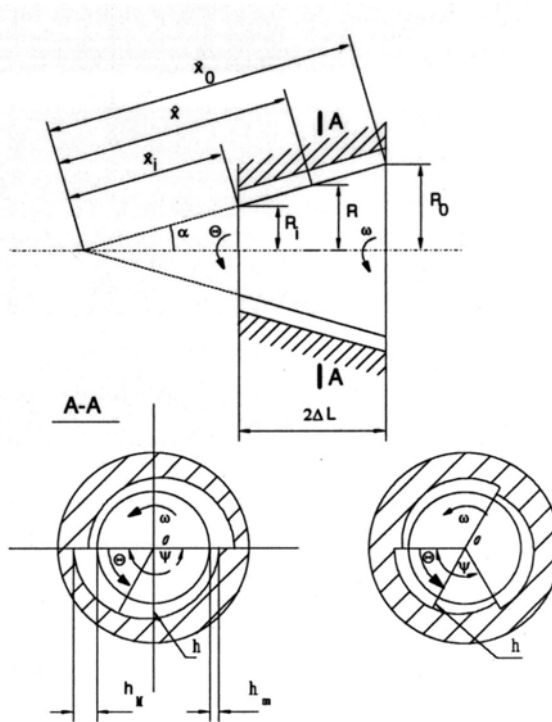
$$R(x) = x \sin \alpha \quad (1)$$

Grubość szczeliny łożyska opisana jest funkcją  $h(x, \theta)$  oznaczającą odległość między stożkową powierzchnią wału i krzywoliniową powierzchnią panwi.

W diskutowanym tutaj przypadku łożyska wielokrzywkowego opiszemy grubość szczeliny wprowadzając parametr zbieżności  $M$ :

$$M = \frac{h_M}{h_m}, \quad (2)$$

gdzie:  $h_m$  oznacza minimalną grubość szczeliny w dowolnym przekroju poprzecznym łożyska, zaś  $h_M$  - jej grubość maksymalną.



Rys. 1. Geometria wielokrzywkowego łożyska stożkowego

Oznaczając przez  $\Psi$  kąt łuku krzywki możemy przedstawić grubość szczeliny łożyska w postaci:

$$h = h_M H(M, \psi, \Theta), \quad (3)$$

gdzie

$$h_M = \text{const}, \quad (4)$$

zauważmy, że:

- dla  $\Theta = 0$  mamy  $H(M, \psi, \Theta) = 1$ ,

- dla  $\Theta = \psi$  mamy  $H(M, \psi, \psi) = \frac{1}{M}$

#### RÓWNANIE REYNOLDSA

Równanie Reynoldsa dla łożyska stożkowego smarowanego ferrociecżą ma postać [6]:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left( Rh^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{\mu_0 \sigma}{\nu} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} \left( Rh^3 \frac{\partial \hat{H}_b}{\partial x} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( h^3 \frac{\partial p}{\partial \Theta} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \Theta}. \quad (5)$$

Występująca w powyższym równaniu składowa wzdłużna pola magnetycznego jest  $\hat{H}_b$  funkcją tylko zmiennej  $x$

$$\hat{H}_b = \hat{H}_b(\hat{x}). \quad (6)$$

Wprowadzając pomocnicze wielkości bezwymiarowe (zdefiniowane w spisie oznaczeń) oraz bezwymiarową współrzędną  $\hat{x}$ :

$$\hat{x} = \frac{l}{\delta} \left( \frac{R}{R_a} - 1 \right), \quad (7)$$

zmieniającą się w przedziale  $\pm 1$ , możemy zapisać równanie Reynoldsa w bezwymiarowej formie:

$$\frac{\delta x + 1}{\delta^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\delta x + 1) H^3 \frac{\partial P}{\partial x} \right] - R_f \frac{\delta x + 1}{\delta^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\delta x + 1) H^3 \frac{dH_b^v}{dx} \right] + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( H^3 \frac{\partial P}{\partial \Theta} \right) = (\delta x + 1)^2 \frac{\partial H}{\partial \Theta} \quad (8)$$

## ROZWIZANIE RÓWNANIA REYNOLDSA

Rozwiązanie równania Reynoldsa (7) będziemy poszukiwać w postaci iloczynu:

$$P = P_\infty(\Theta) f(x), \quad (9)$$

gdzie  $P_\infty(\Theta)$  jest rozwiązaniem następującego równania:

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} \left( H^3 \frac{\partial P}{\partial \Theta} \right) = \frac{\partial H}{\partial \Theta} \quad (10)$$

opisującego rozkład ciśnienia w szczelinie łożyska z pominięciem pierścieniowego przepływu medium smarnego. Całkując (10) otrzymujemy [5]:

$$P_\infty(\Theta) = \int_0^\Theta (H^{-2} - H^* H^{-3}) d\Theta, \quad (11)$$

gdzie  $H^*$  oznacza grubość filmu smarnego w przekroju szczeliny, w którym ciśnienie  $P_\infty$  osiąga maksimum. Przyjmując warunek brzegowy:

$$P(\psi) = 0, \quad (12)$$

możemy wyznaczyć [4]:

$$H^* = \frac{\int_0^\psi H^{-2} d\Theta}{\int_0^\psi H^{-3} d\Theta}. \quad (13)$$

Funkcję  $f(x)$  będziemy poszukiwać w postaci szeregu:

$$f(x) = \sum_{m=1}^n C_m f_m(x) \quad (14)$$

Stosując metodę Galerkina dla wyznaczenia współczynnika  $C_m$  będziemy rozważać każdą funkcję  $f_m(x)$  jako funkcję testującą mającą zera w punktach  $x = \pm 1$ ; ten warunek jest równoważny założeniu, że ciśnienie w łożysku jest równe zero na jego zewnętrznych krańcach.

Układ równań Galerkina dla określenia współczynników  $C_m$  ma postać:

$$\int_0^{\psi} \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{\delta x + 1}{\delta^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\delta x + 1) H^3 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \right] - R_f \frac{\delta x + 1}{\delta^2 + \eta^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\delta x + 1) H^3 \frac{\partial H_b^y}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( H^3 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \Theta} \right) \right\} \cdot P_{\infty}(\Theta) f_i(x) d\Theta dx = \int_0^{\psi} \int_{-1}^{+1} \left[ (\delta x + 1)^2 \frac{\partial H}{\partial \Theta} \right] P_{\infty}(\Theta) f_i(x) d\Theta dx. \quad (15)$$

Wyznaczając całki w równaniu (15) otrzymujemy:

$$\sum_{m=1}^n C_m A_{mi} + G_{\Theta} \frac{1}{\delta^2 + \eta^2} \left( \delta \sum_{m=1}^n C_m B_{mi} + \sum_{m=1}^n C_m D_{mi} \right) = \frac{R_f G_f}{\delta^2 + \eta^2} E_i + F_i, \quad (16)$$

tutaj oznaczono:

$$G_{\Theta} = \frac{\int_0^{\psi} [P_{\infty}(\Theta)]^2 H^3 d\Theta}{\int_0^{\psi} [P_{\infty}(\Theta)] \frac{\partial H}{\partial \Theta} d\Theta}, \quad G_f = \frac{\int_0^{\psi} [P_{\infty}(\Theta)] H^3 d\Theta}{\int_0^{\psi} [P_{\infty}(\Theta)] \frac{\partial H}{\partial \Theta} d\Theta}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} A_{mi} &= \int_{-1}^{+1} f_m(x) f_i(x) dx, \\ B_{mi} &= \int_{-1}^{+1} (\delta x + 1) \frac{df_m(x)}{dx} f_i(x) dx, \\ D_{mi} &= \int_{-1}^{+1} (\delta x + 1)^2 \frac{d^2 f_m(x)}{dx^2} f_i(x) dx, \\ E_{mi} &= \int_{-1}^{+1} (\delta x + 1) \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\delta x + 1) \frac{dH_b^y}{dx} \right] f_i(x) dx, \\ F_{mi} &= \int_{-1}^{+1} (\delta x + 1)^2 f_i(x) dx. \end{aligned} \quad (18)$$

Postać współczynnika  $C_m$  zależy od postaci funkcji  $f_m(x)$  przybliżających rozkład ciśnienia wzdłuż tworzącej łożyska. Przyjmując dla  $f_m(x)$  następującą postać

$$f_m(x) = \cos(a_m x) \quad \text{gdzie} \quad a_m = \frac{2m-1}{2} \pi \quad (19)$$

oraz dokonując wyliczeń całek ze wzorów (18) dla  $i=m$  otrzymamy następujący ciąg określający współczynniki  $C_m$ :

$$C_m = \frac{F_m + \frac{R_f + G_f}{\delta^2 + \eta^2} E_m}{1 - \frac{G_{\Theta}}{3} \frac{\delta^2 + 3}{\delta^2 + \eta^2} a_m^2}, \quad (20)$$

gdzie:

$$F_m = \left[ \left( 1 - \frac{2}{a_m^2} \right) \delta^2 + 1 \right] \frac{2}{a_m} (-1)^{m+1}. \quad (21)$$

Dla efektywnego określenia  $E_m$ , konieczna jest znajomość postaci funkcji  $H_b$  określającej rozkład pola magnetycznego w szczelinie; przyjmując  $v=1$  oraz paraboliczny rozkład  $H_b$ :

$$H_b = a(\delta x + l)^2 + b(\delta x + l) + c \quad (22)$$

gdzie:  $a, b, c$ , są współczynnikami zależnymi od wartości współrzędnych szczeliny i wartości pola magnetycznego  $H_0$  otrzymamy:

$$E_m = 2\delta^2 \left[ 2aF_m + \frac{b}{a_m} (-1)^{m+1} \right]. \quad (23)$$

#### PARAMETRY MECHANICZNE ŁOŻYSKA

Znając rozkład ciśnienia w filmie smarnym możemy określić parametry mechaniczne łożyska. Okresowo symetryczne łożysko (rys.1.) może przenosić tylko obciążenia wzdłużne dane zależnością [6,7]:

$$W_A = N \int_0^\psi \int_{R_i}^{R_o} p R dR d\Theta. \quad (24)$$

Tutaj  $N$  oznacza ilość krzywek w łożysku.

Uwzględniając zależności (9), (14) i (20) możemy napisać:

$$W_A = \frac{6\mu\omega\delta R_a^4}{h_M^2} N \int_0^\psi P_\infty(\Theta) d\Theta \sum_{m=1}^n C_m \int_{-l}^{+l} (\delta x + l) f_m(x) dx. \quad (25)$$

Po wykonaniu obliczeń otrzymamy:

$$W_A = P_A W_{A\infty} K, \quad (26)$$

gdzie:

$$P_A = \wedge R_a^2 \delta \quad (27)$$

jest parametrem obciążenia wzdłużnego,

$$W_{A\infty} = N \int_0^\psi P_\infty(\Theta) d\Theta \quad (28)$$

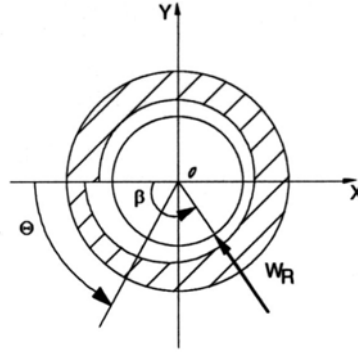
jest bezwymiarowym obciążeniem wzdłużnym,

$$K = \sum_{m=1}^n C_m \frac{2}{a_m} (-1)^{m+1} \quad (29)$$

jest współczynnikiem obciążenia wzdłużnego.

W szczególnym przypadku łożyska jednokrzywkowego przedstawionego na rysunku 2 istnieje możliwość przenoszenia obciążenia poprzecznego.

Rys. 2. Przekrój poprzeczny jednokrzywkowego łożyska stożkowego



Składowe kartezjańskie tego obciążenia są dane zależnościami:

$$W_x = \text{ctg} \alpha \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} pR \cos \Theta dR d\Theta, \quad (30)$$

$$W_y = \text{ctg} \alpha \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_o} pR \sin \Theta dR d\Theta. \quad (31)$$

Uwzględniając wyliczenia dla  $W_A$  można napisać:

$$W_x = P_R W_{x\infty} K, \quad W_y = P_R W_{y\infty} K, \quad (32)$$

gdzie

$$P_R = P_A \text{ctg} \alpha.$$

$$W_{x\infty} = \int_0^{2\pi} P_{\infty}(\Theta) \cos \Theta d\Theta, \quad W_{y\infty} = \int_0^{2\pi} P_{\infty}(\Theta) \sin \Theta d\Theta. \quad (33)$$

Wartość wypadkowej obciążenia poprzecznego i jej kąt nachylenia  $\beta$  określają wzory:

$$W_R = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} = P_R W_{R\infty} K, \quad \text{tg} \beta = \frac{W_y}{W_x}, \quad (34)$$

gdzie:

$$W_{R\infty} = \sqrt{W_{x\infty}^2 + W_{y\infty}^2}. \quad (35)$$

Napężenie styczne  $\tau$  na ścinanie wału jest równe [6]:

$$\tau = \frac{\mu R \omega}{h} + \frac{h}{2R} \frac{\partial p}{\partial \Theta}, \quad (36)$$

zaś moment tarcia  $M_T$  jest równy:

$$M_T = \frac{N}{\sin \alpha} \int_0^{\psi} \int_{R_i}^{R_o} \tau R^2 dR d\Theta. \quad (37)$$

Po wyliczeniach otrzymamy:

$$M_T = M_1 I_1 + M_2 (I_1 - I_2) K, \quad (38)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{\mu\omega}{4h_M} \frac{R_0^4}{\sin \alpha} (1 - \varepsilon^4), & M_2 &= \frac{3\mu\omega}{16h_M} \frac{R_0^4}{\sin \alpha} (1 + \varepsilon)^2 (1 - \varepsilon^2), \\ I_1 &= N \int_0^\psi H^{-1} d\Theta, & I_2 &= NH^* \int_0^\psi H^{-2} d\Theta. \end{aligned} \quad (39)$$

Dla wyznaczenia  $\frac{\partial p}{\partial \Theta}$  wykorzystano zależność ( 11).

#### LITERATURA

1. J.S.Walker, J.D.Buckmaster: *Ferrodynamic thrust bearing*, *Int. J. Eng. Sci*, vol.17, (1979), 1171-1182.
2. M.Hebda, A.Wachal: *Trybologia*, WNT, Warszawa, 1980
3. R.E.Rosenweig: *Ferrohydrodynamic*, *Cambridge Univ. Press, Cambrige*, 1985.
4. V.G.Bashtovoy, B.M.Berkovsky, A.N.Vislovich: *Introduction to thermomechanics of magnetic fluids*, *Hemisphere Publ. Corp., Springer herlag, Berlin*, 1988.
5. E.Walicki, A.Walicka: *Performance of a multilobe curvilinear thrust bearing*, *ZN WSI Zielona Góra, Mechanika*, 20 (1994), s. 62-74.
6. E.Walicki, A.Walicka: *Analysis of a ferrofluid floty in a slot of the curvilinear thrust bearing*, *Appl. Mech. Eng.* ( w druku ).
7. E.Walicki, A.Walicka, T.Karpiński: *A Galerkin's method for multilobe conical bearing with an incompressible Newtonian lubricant*, *Appl. Mech. Eng.* ( praca zgłoszona do druku ).

#### MECHANICAL PARAMETERS FOR MULTILOBE CONICAL BEARING WITH AN INCOMPRESSIBLE FERROFLUID

#### SUMMARY

In this paper the authors present a solution to the problem of a multilobe conical bearing lubricated with an incompressible ferrofluid. The problem was solved by the Galerkin's method after assuming that the inertia effect of the lubricant floty is negligibly small. The general formulae for mechanical parameters are given.

*Recenzja: prof dr hab. inż. Jan Burcan*